Analyse Complexe
TD 6
Fonctions elliptiques

Exercice 1 Soient α, β des complexes non colinéaires, $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$ le réseau correspondant. Soit f une fonction méromorphe sur $\mathbb{C}$, non constante, Λ-périodique (cela signifie par définition que f est à la fois α-périodique et β-périodique).

1. Montrer qu'il existe un complexe z_0 tel que f n'a ni zéros ni pôles sur le bord du parallélogramme
$$\{z_0 + x\alpha + y\beta \mid 0 \le x, y \le 1\},$$
et montrer que f a autant de zéros que de pôles, comptés avec multiplicités, à l'intérieur de celui-ci.
2. Si S est une partie finie de $\mathbb{C}$ et $n \ge 1$ un entier, montrer que l'ensemble des fonctions méromorphes sur $\mathbb{C}$, Λ-périodiques et dont les pôles sont tous dans $S + \alpha\mathbb{Z} + \beta\mathbb{Z}$ et tous d'ordre $\le n$, est un espace vectoriel complexe de dimension finie.
3. En considérant $f' + f^2$, montrer que lorsque S n'a qu'un élément et $n = 1$, on obtient seulement les fonctions constantes.

Exercice 2 On reprend les notations de l'exercice précédent.

1. (*) Soit f une fonction méromorphe non identiquement nulle sur $\mathbb{C}$, Λ-périodique. Soit $\{z_1, \dots, z_k\}$ un ensemble de représentants modulo Λ de l'ensemble formé des zéros et des pôles de f, m_i l'ordre du zéro ou du pôle de f en z_i. On a vu dans l'exercice précédent que $\sum_i m_i = 0$. Montrer qu'on a aussi :
$$\sum_{i=1}^{k} m_i z_i \in \Lambda.$$
2. Réciproquement, on se donne $\{z_1, \dots, z_k\} \subset \mathbb{C}$ distincts modulo Λ, et des entiers $m_1, \dots, m_k \in \mathbb{Z}$ tels que :
$$\sum_{i=1}^{k} m_i = 0 \text{ et } \sum_{i=1}^{k} m_i z_i = 0.$$
On va montrer qu'il existe une fonction méromorphe f comme dans la question précédente.
   (a) Montrer que le produit de Weierstrass
$$\sigma(z) = z \prod_{\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}} \left(1 - \frac{z}{\lambda}\right) e^{z/\lambda + z^2/2\lambda^2}$$
définit une fonction entière σ dont l'opposé de la dérivée logarithmique $\xi := -\sigma'/\sigma$ vérifie
$$\xi' = \wp,$$
$\wp$ étant la fonction de Weierstrass introduite dans le cours.
   (b) Montrer qu'il existe des nombres complexes t_α, t_β tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$,
$$\xi(z + \alpha) = \xi(z) + t_\alpha \text{ et } \xi(z + \beta) = \xi(z) + t_\beta.$$
   (c) Montrer qu'il existe $C_\alpha, C_\beta \in \mathbb{C}^\times$ tels que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$,
$$\sigma(z + \alpha) = C_\alpha \sigma(z) e^{-t_\alpha z} \text{ et } \sigma(z + \beta) = C_\beta \sigma(z) e^{-t_\beta z}.$$

(d) Montrer que la fonction

$$f(z) = \prod_{i=1}^{k} \sigma(z - z_i)^{m_i}$$

convient.

Exercice 3 Soit $\tau \in \mathbb{C}$ tel que $\mathrm{Im}\tau > 0$. Notons $\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z} = \{a + b\tau \mid a, b \in \mathbb{Z}\}$. Rappelons qu'il existe un polynôme $Q(X) = 4X^3 - 60G_4(\tau)X - 140G_6(\tau)$ tel que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$,

$$(\wp'(z))^2 = Q(\wp(z)).$$

On note aussi $g_2(\tau) = 60G_4(\tau)$ et $g_3(\tau) = 140G_6(\tau)$.

1. Montrer que la fonction $\wp'$ s'annule en $1/2 + \Lambda$, $\tau/2 + \Lambda$ et $(1 + \tau)/2 + \Lambda$ et nulle part ailleurs, et que tous ces zéros sont simples.
2. Montrer que si $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ est tel que $\wp(z) = \wp(1/2)$, alors $z - 1/2 \in \Lambda$. Que dire de l'ordre d'annulation de $\wp - \wp(1/2)$ en $1/2$?
   Démontrer un résultat similaire pour $\tau/2$ et $(1 + \tau)/2$.
3. En déduire que le polynôme Q a trois racines distinctes.
4. En déduire que la fonction holomorphe sur le demi-plan de Poincaré

   $$\Delta : \tau \mapsto g_2(\tau)^3 - 27g_3(\tau)^2$$

   ne s'annule pas.
5. Montrer que si $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ est tel que $y^2 = Q(x)$, il existe $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$, unique modulo Λ, tel que

   $$(\wp(z), \wp'(z)) = (x, y).$$

   On pourra s'intéresser aux zéros de $\wp - x$ et à leurs multiplicités.
6. Soit $z_0 \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$. Déterminer les pôles de la fonction elliptique

   $$z \mapsto \wp(z + z_0) - \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z_0)}{\wp(z) - \wp(z_0)}\right)^2$$

   et la partie polaire en $-z_0$, et en déduire que pour tout $z \in \mathbb{C} \setminus \Lambda$ tel que $z \notin \pm z_0 + \Lambda$,

   $$\wp(z + z_0) + \wp(z) + \wp(z_0) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp'(z) - \wp'(z_0)}{\wp(z) - \wp(z_0)}\right)^2.$$

Exercice 4

1. Montrer que si $\Lambda = \alpha\mathbb{Z} \oplus \beta\mathbb{Z}$ où α et β ne sont pas colinéaires, il existe $\gamma \in \mathbb{C}^\times$ et τ dans le demi-plan de Poincaré tels que

   $$\gamma\Lambda = \mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z}.$$

2. Montrer que la formule

   $$j(\tau) = 1728\frac{g_2(\tau)^3}{\Delta(\tau)}$$

   définit une fonction holomorphe sur le demi-plan de Poincaré.
3. Soit τ dans le demi-plan de Poincaré. Montrer que si $(a)\, b$
   $cd \in SL_2(\mathbb{Z})$ il existe $\gamma \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\mathbb{Z} \oplus \frac{a\tau+b}{c\tau+d}\mathbb{Z} = \gamma\,(\mathbb{Z} \oplus \tau\mathbb{Z})$. En déduire

   $$j\left(\frac{a\tau + b}{c\tau + d}\right) = j(\tau).$$